КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

2024-2025 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

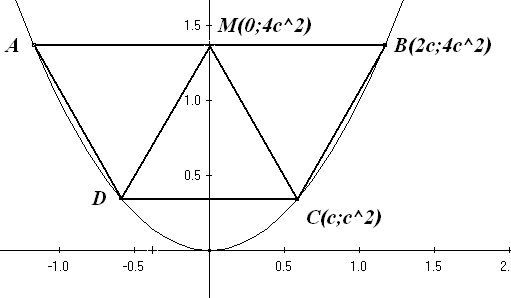
На олимпиаде используется 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Критерии оценивания** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 4–5 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. В задаче «Оценка + пример» доказана оценка. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В задаче «Оценка + пример» построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Кроме того,

1. результатом выполнения каждого задания должна быть запись полного решения со всеми необходимыми обоснованиями и выводами; ответ без обоснований (если они требуются) оценивается в 0 баллов;
2. любое правильное (полное) решение оценивается в 7 баллов; недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;
3. олимпиадная работа не является контрольной работой, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
4. баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
5. если к задаче приведены указания к оцениванию – они имеют приоритет над общими указаниями.

**1.** В параболу  вписана трапеция *ABCD*, основания *АВ* и *CD* которой параллельны оси абсцисс, *AB* = 2*CD*, ∠*DAB* = ∠*CBA* = 60°. Найдите расстояние от начала координат до прямой *АВ*.

***Решение****:* Расположим вершины так, как показано на рисунке с координатами *С* (*с*; *с*2), *В* (2*с*; 4*с*2).

*М* (0; 4*с*2) – середина основания *АВ* лежит на оси ординат, т.к. треугольники *BCM*, *ADM* – равносторонние. Тогда высота такого треугольника , откуда . Тогда нужное нам расстояние равно .

**2.** Пять детей принесли в садик пять одинаковых наборов кубиков, из которых собирается рисунок. Пока играли, они потеряли какие-то кубики. Оказалось, что любые три ребенка могут собрать картинку, но никакие два не могут. Какое наименьшее количество кубиков могло быть в наборе?

***Решение****:* Ответ: 10 кубиков.

Сначала рассмотрим детей. Есть 10 различных пар детей, у каждой пары должен отсутствовать хотя бы один кубик, причем у каждой пары это различные кубики, иначе из таких пар можно выбрать три ребенка, которые не смогут составить картинку. Таким образом, есть хотя бы 10 различных кубиков.

Покажем как раздать кубики, если их 10. У каждой из 10 пар детей отсутствует свой кубик. Тогда всего различных кубиков будет как раз 10.

***Комментарий***: только оценка – 4 баллов, только пример – 2 балла.

**3.** Найдите все пары натуральных чисел (*x*, *y*), для которых число  – простое.

***Решение***:2 пары – (2, 2) и (6, 2).

Имеем равенство , где *р* – простое число. Тогда либо *x*, либо *y* делится на *р*. Пусть на *р* делится *у* и *y* = *pc*, где *с* – натуральное число, тогда  ⇔ , откуда на *р* делится *х* . Значит, сразу и будем рассматривать этот случай: *x* = *pa*, где *а* – натуральное число. Тогда  ⇔ , откуда *y* делится на *a*, т.е. *y* = *ab*, где *b* – натуральное число. Следовательно, , откуда простое число *р* делится на *b*, значит, либо *b* = *p*, либо *b* = 1.

Если *b* = *p*, то  ⇔ , откуда *р* = 2, *a* = 1, *x* = *pa* =2, *y* = *ab* = *ap* = 2 и действительно  – простое число.

Если *b* = 1, то  ⇔ , что для простого числа *р* при натуральном *a* возможно только, когда *a* – 1 = 1, *a* + 1 = 3, т.е. *а* = 2, *р* = 3, *х* = *ра* = 6, *у* = *ab* = 2 и действительно  – простое число.

**4.** Существует ли тетраэдр, в котором две грани – прямоугольные треугольники, а две другие грани – тупоугольные треугольники (при этом наибольшие углы граней находятся при разных вершинах тетраэдра)?

***Решение***: Ответ: Нет.

Если *A* – вершина тетраэдра, а *α*, *β*, *γ* –плоские углы при этой вершине, то для трехгранного угла с вершиной в *A* выполняется неравенство: *α* + *β* > *γ*. Если *γ*– неострый угол, то *α* + *β* > 90°. Поэтому *α* + *β* + *γ* > 2*γ* ≥ 180°. Следовательно, если такой тетраэдр существует, то сумма всех плоских углов при всех вершинах тетраэдра должна быть строго больше, чем 4 · 180° = 720°.

Это противоречит тому, что сумма всех плоских углов при вершинах тетраэдра равна 720°, т.е. равна сумме всех внутренних углов четырех треугольных граней.

***Комментарий:*** Если дан только ответ – 0 баллов.

Если отмечено неравенство *α* + *β* > *γ* для плоских углов трехгранного угла – 3 балла.

Если записаны четыре равенства из теоремы косинусов для четырех неострых углов – 2 балла.

Полное решение – 7 баллов.

**5.** Аня пишет числа 1, 2, . . ., 100 в клетки таблицы 10 x 10, каждое число по одному разу, в произвольном порядке. За один ход Боря выбирает линию и просит Аню упорядочить числа: по возрастанию слева направо, если это строка, и по возрастанию сверху вниз, если это столбец. При этом Боря таблицу не видит. Через 11 ходов он должен указать клетку, на которой будет написано число от 30 до 71. Сможет ли Боря гарантированно победить, как бы ни расставляла числа Аня?

***Решение****.* Назовём столбцы слева направо буквами *a*, *b*, . . . , *j*, а строки сверху вниз пронумеруем числами 1, 2, . . . , 10. Упорядочим сначала числа во всех строчках, а последним шагом упорядочим числа в столбце *e*. Покажем, что число из клетки *e*6 нам подходит.

Во-первых, допустим, что оно оказалось больше 71. Тогда числа в клетках *e*7, *e*8, *e*9, *e*10 тоже больше 71, и во все строчках, в которых стояли числа *e*6, *e*7, *e*8, *e*9, *e*10 до упорядочивания столбца *e*, есть ещё по 5 чисел, больших 71. Получаем во всей таблице минимум 30 чисел, больших 71, чего не может быть.

Во-вторых, докажем, что оно не меньше 30. Предположим противное. Тогда числа в клетках *e*1, *e*2, *e*3, *e*4, *e*5 также меньше 30, и в каждой строке, где стояли числа *e*1, *e*2, *e*3, *e*4, *e*5, *e*6 до упорядочивания столбца *e*, есть по 4 числа, меньших 30. Таким образом, всего чисел, меньших 30, хотя бы 30, что опять же невозможно.